OPERACIONES CON MATRICES FICHA 4

1) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) Calcula, en función de A los determinantes de 2A y A^t (traspuesta)

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

2) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula su séptima potencia (A^7)

3) Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

a) Calcula los valores $\lambda \in R$ tales que $|A-\lambda I| = 0$

b) Calcula $A^2 - 7A + 10I$

4) Sea A una matriz cuadrada que verifica que $A^2 + A = I$ (siendo I la matriz identidad)

Calcula: $(A+I)^2 - (A+I)$

5) Decimos que una matriz cuadrada A es idempotente cuando se cumple $A^2 = A$, comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ es idempotente. Determina las condiciones que debe cumplir una matriz cuadrada de orden dos para que sea idempotente.

SOLUCIONES

1) a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

b) $|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = 4|A| = -4a^2$

$|A^t| = |A| = -a^2$ (el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta)

c) No puede haber ningún a para que sea simétrica ya que los números que no están en la diagonal principal son 0 y 1 (tendrían que ser iguales)

A simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ IMPOSIBLE

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vemos que, siguiendo así tendremos que: $A^7 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{7} & \frac{7}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

b) $A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $A^2 + A = I$

$$(A+I)^2 - (A+I) = A^2 + AI + IA + I^2 - A - I = A^2 + A + A + I - A - I = A^2 + A = I$$

5) Tiene que ser $A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

Una matriz cualquiera, de orden dos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a^2 + bd = a \\ ab + bc = b \\ ac + cd = c \\ cb + d^2 = d \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} \left.\begin{matrix} a - a^2 = bc \\ d - d^2 = cb \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a(1-a) = bc \\ d(1-d) = cb \end{matrix}\right\} \rightarrow ad = bc \\ \left.\begin{matrix} c(a+d) = c \\ b(a+d) = b \end{matrix}\right\} \rightarrow a + d = 1 \rightarrow d = 1 - a \end{matrix} \right.$$

Conclusión: para que una matriz de orden 2 sea idempotente el producto de las diagonales debe ser el mismo y la diagonal principal debe sumar 1

Ejemplos: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$